目次

1. 伝達関数について

回路の周波数応答を表すのに $S = j\omega$ と置き

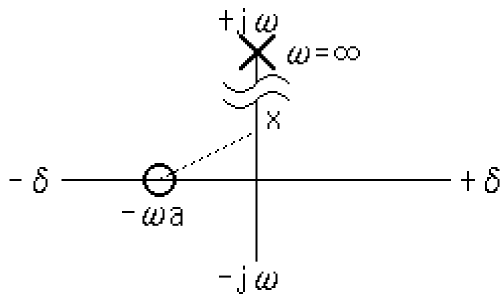
$T(S) = \omega a/(S + \omega a)$　　　のように表現する。

この例では $S = \infty$ の時、関数値がゼロ（零点）となり、 $S = -\omega a$ の時に最大（極）となる。

この例の周波数応答は

$Vo/Vi = 1/Sqrt(1 + (\omega/\omega a)^2)$　　　位相 $= Atan(-\omega/\omega a)$

S平面での極（○）と零点（×）の位置



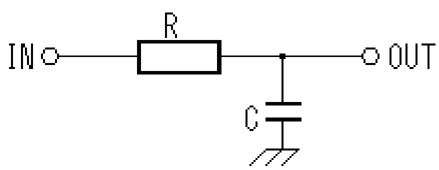
ωａ を１に正規化した場合

振幅特性は極から虚数軸の任意の角周波数 x までの距離に比例して減衰する。

位相特性は実数軸との角度で示される。

この様にＳ平面上の極と零点の配置で周波数応答を知ることが出来る。

伝達関数の算出例



$$Vout/Vin = 1/(j*\omega*C) / (R + 1/(j*\omega*C))$$

$$= 1/ (j*\omega*C*R + 1)$$

これから　$j*\omega = S$ と置いて

$$T(S) = 1/(C*R*S + 1)$$

$$= 1/(C*R) / (S + 1/(C*R))$$

ここで $1/(C*R) = \omega a$ とすれば

$T(S) = \omega a / (S + \omega a)$

となる。

1）２次の伝達関数の極の配置

伝達関数の分母がゼロになる位置が極であるから

$S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2 = 0$

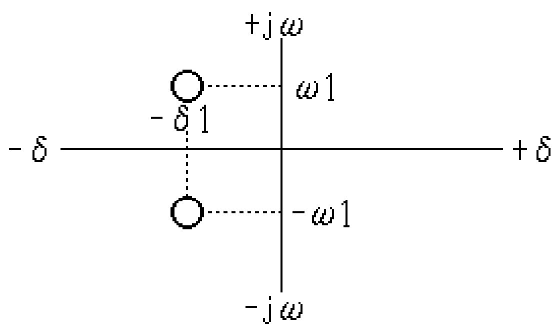
よって

$Q < 0.5$ の場合

$S = -\omega o/(2*Q) \pm \omega o*Sqrt(1/(4*Q^2) - 1)$

$Q > 0.5$ の場合

$S = -\omega o/(2*Q) \pm j*\omega o*Sqrt(1 - 1/(4*Q^2))$



$\omega 1 = \omega o* Sqrt(1 - 1/(4*Q^2))$

$\delta 1 = \omega o/(2*Q)$

２次の伝達関数の零点の配置

伝達関数の分子がゼロになる位置が零点である。

２次のＬＰＦ

$$T(S) = H \frac{\omega o^2}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$ $S = j\infty$ に２重零点

２次のＨＰＦ

$$T(S) = H \frac{S^2}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$ $S = 0$ に２重零点

２次のＢＰＦ

$$T(S) = H\frac{\omega o/Q*S}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$

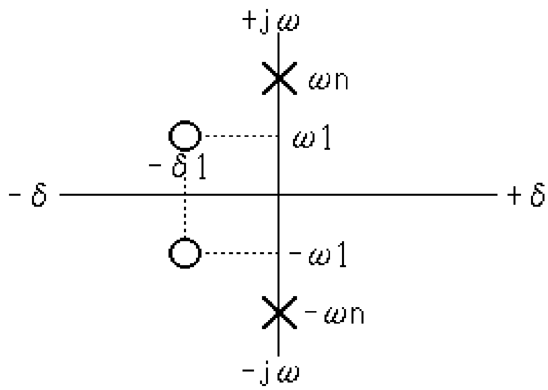
S = j∞ と
S = 0　に零点

２次の伝送零点

$$T(S) = H\frac{S^2 + \omega n^2}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$

S = ±jωn に零点

例）２次の伝送零点の極と零点（Q ＞ 0.5）



ω1 = ωo*Sqrt(1 - 1/(4*Q^2))

δ1 = ωo/(2*Q)

2. 基本的な伝達関数

λ ： 正規化角速度。

　　$\lambda = \omega/\omega a$　または　$\lambda = \omega/\omega o$　とする。

◎１次のＬＰＦ（低域通過型）

$$T(S) = H \frac{\omega a}{S + \omega a}$$

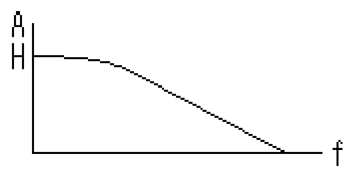
周波数応答

Vo/Vi = H/Sqrt(1 + λ^2)　　　位相 = Atan(-λ)

遅延特性

τ = 1/(ωa*(λ^2 + 1))

振幅特性



任意の利得(A)を与える正規化角速度(λ)の逆算

λ= Sqrt((H/A)^2 - 1)

◎１次のＨＰＦ（高域通過型）

$$T(S) = H \frac{S}{S + \omega a}$$

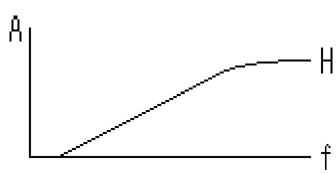
周波数応答

Vo/Vi = H/Sqrt(1 + 1/λ^2)　　　位相 = Atan(1/λ)

遅延特性

τ = 1/(ωa*(λ^2 + 1))

振幅特性



任意の利得(A)を与える正規化角速度(λ)の逆算

$\lambda = 1/\mathrm{Sqrt}((H/A)^2 - 1)$

◎２次のＬＰＦ（低域通過型）

$$T(S) = H \frac{\omega o^2}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$

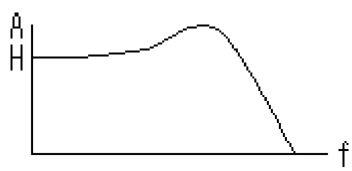
周波数応答

$Vo/Vi = H/\mathrm{Sqrt}((1 - \lambda^2)^2 + (\lambda/Q)^2)$　　位相 $= \mathrm{Atan}(Q*(1/\lambda - \lambda)) - 90^\circ$

遅延特性

$\tau = Q*(1 + \lambda^2) / (\omega o*(\lambda^2 + Q^2*(1 - \lambda^2)^2))$

振幅特性



任意の利得(A)を与える正規化角速度(λ)を求める

$M = 1 - 1/(2 * Q^2)$ として

$\lambda = \mathrm{Sqrt}(M \pm \mathrm{Sqrt}(M^2 + (H/A)^2 - 1))$

λの解は正の実数のみを採用する

最大利得(A)を与える正規化角速度(λp) を求める

$\lambda p = \mathrm{Sqrt}(1 - 1/(2 * Q^2))$

但し、$Q < \mathrm{Sqrt}(0.5)$ の場合は $\lambda p = 0$ とする

λp に於ける利得 Ap(倍) を求める

$Ap = Q*H / \mathrm{Sqrt}(1 - 1/(4 * Q^2)) = Q^2 * H / \mathrm{Sqrt}(Q^2 - 1/4)$

但し、$Q < \mathrm{Sqrt}(0.5)$ の場合は $Ap = H$ とする

◎２次のＨＰＦ（高域通過型）

$$T(S) = H \frac{S^2}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$

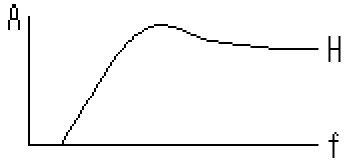
周波数応答

$Vo/Vi = H/\mathrm{Sqrt}((1 - 1/\lambda^2)^2 + 1/(Q*\lambda)^2)$　位相 $= \mathrm{Atan}(Q*(1/\lambda - \lambda)) + 90^\circ$

遅延特性

$\tau = Q*(1 + \lambda^2) / (\omega o*(\lambda^2 + Q^2*(1 - \lambda^2)^2))$

振幅特性



任意の利得(A)を与える正規化角速度(λ)を求める

$M = 1/(2 * Q^2) - 1$ として

$\lambda = \mathrm{Sqrt}((M \pm \mathrm{Sqrt}(M^2 + (H/A)^2 - 1)) / ((H/A)^2 - 1))$

λの解は正の実数のみを採用する

最大利得(A)を与える正規化角速度(λp) を求める

$\lambda p = 1 / \mathrm{Sqrt}(1 - 1/(2 * Q^2))$

但し、$Q < \mathrm{Sqrt}(0.5)$ の場合は $\lambda p = \infty$ とする

λp に於ける利得 Ap(倍) を求める

$Ap = Q*H / \mathrm{Sqrt}(1 - 1/(4 * Q^2))$

$= Q^2 * H / \mathrm{Sqrt}(Q^2 - 1/4)$

但し、$Q < \mathrm{Sqrt}(0.5)$ の場合は $Ap = H$ とする

◎２次のＢＰＦ（帯域通過型）

$$T(S) = H \frac{\omega o/Q*S}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$

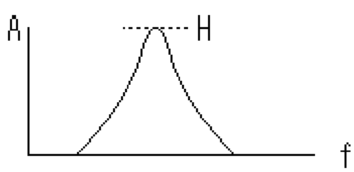
周波数応答

$Vo/Vi = H/\mathrm{Sqrt}(1 + (Q*(1/\lambda - \lambda))^2)$　　　位相 $= \mathrm{Atan}(Q*(1/\lambda - \lambda))$

遅延特性

$\tau = Q*(1 + \lambda^2) / (\omega o*(\lambda^2 + Q^2*(1 - \lambda^2)^2))$

振幅特性



任意の利得(A)を与える正規化角速度(λ)を求める

$M = 1 + ((H/A)^2 - 1)/(2 * Q^2)$ として

$\lambda = \mathrm{Sqrt}(M \pm \mathrm{Sqrt}(M^2 - 1))$

λの解は正の実数のみを採用する

最大利得(A)を与える正規化角速度(λp) を求める

$\lambda p = 1$

λp に於ける利得 Ap(倍) を求める

$Ap = H$

◎２次の伝送零点

$$T(S) = H\frac{S\hat{}2 + \omega n\hat{}2}{S\hat{}2 + \omega o/Q*S + \omega o\hat{}2}$$

周波数応答

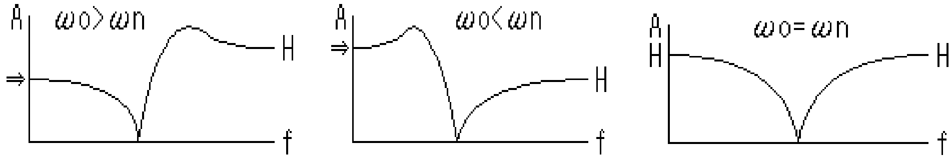
$Vo/Vi = H*|(\omega n/\omega o)\hat{}2 - \lambda\hat{}2| /\mathrm{Sqrt}((1 - \lambda\hat{}2)\hat{}2 +(\lambda /Q)\hat{}2)$

位相 $= \mathrm{Atan}(Q*(1/\lambda - \lambda)) - 90^\circ*(\omega n - \omega)/|(\omega n - \omega)|$

遅延特性

$\tau = Q*(1 + \lambda\hat{}2) / (\omega o*(\lambda\hat{}2 + Q\hat{}2*(1 - \lambda\hat{}2)\hat{}2))$

振幅特性



$\omega=0$ と $\omega=\infty$ との利得比は $(\omega o/\omega n)\hat{}2$ となる

⇒印の位置の利得は $H*(\omega n/\omega o)\hat{}2$

任意の利得(A)を与える正規化角速度(λ)を求める

$M = 1 - 1/(2 * Q\hat{}2) - (H/A)\hat{}2 * (\omega n/\omega o)\hat{}2$ として

$\lambda = \mathrm{Sqrt}((M \pm \mathrm{Sqrt}(M\hat{}2 - (1 - (H/A)\hat{}2)*(1 - (H/A)\hat{}2 * (\omega n/\omega o)\hat{}4))) / (1 - (H/A)\hat{}2));$

λ の解は正の実数のみを採用する

最大利得(A)を与える正規化角速度(λp) を求める

$K = (\omega n/\omega o)\hat{}2$

$N = (K+1)/(2 + 1/(Q\hat{}2*(K - 1)))$ として

$\lambda p = \mathrm{Sqrt}(N \pm \mathrm{Sqrt}(N*(N - (2 - 1/(Q\hat{}2 * (1 - 1/K)))/(1 + 1/K))))$

$\pm$ は $\omega o<\omega n$ の場合 −、$\omega o>\omega n$ の場合は + を用いる

但し、 下記の場合は $0<\lambda<\infty$ の範囲に極大値を持たない

1. K=1 つまり $\omega n=\omega o$ の場合 ($\lambda=0$ と $\lambda=\infty$ の2点で最大利得を持つ)
2. λp の解に実数が得られない場合

   $\omega o<\omega n$ ならば $\lambda=0$ 、$\omega o>\omega n$ならば $\lambda=\infty$ で最大利得を持つ

注) 実用上は $\omega o<\omega n$ の場合は通過域のレベルを揃えるため H に $(\omega o/\omega n)\hat{}2$ を乗じる

$$T(S) = H*(\omega o/\omega n)\hat{}2\frac{S\hat{}2 + \omega n\hat{}2}{S\hat{}2 + \omega o/Q*S + \omega o\hat{}2}$$

◎１次のＡＰＦ（全域通過型）

$$T(S) = \frac{S - \omega a}{S + \omega a}$$

振幅特性は平坦
位相特性のみ変化する

周波数応答

Vo/Vi = H　　位相 = 2 * Atan(-λ)

遅延特性

τ = 2 / (ωa*(λ^2 + 1))

◎２次のＡＰＦ（全域通過型）

$$T(S) = \frac{S^2 - \omega o/Q*S + \omega o^2}{S^2 + \omega o/Q*S + \omega o^2}$$

振幅特性は平坦
位相特性のみ変化する

周波数応答

Vo/Vi = H　　位相 = 2 * Atan(Q*(1/λ - λ)) - 180°

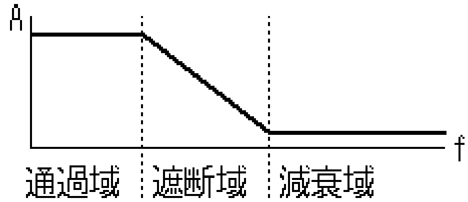
遅延特性

τ = 2*Q*(1 + λ^2) / (ωo*(λ^2 + Q^2*(1 - λ^2)^2))

3．振幅平坦特性フィルタの種類

前記の基本伝達関数を組合わせて縦続接続し、より高度なフィルタを実現します。

用語の定義



ａ）ワグナー・ワグナー（バターワース）特性フィルタ

通過域、減衰域とも減衰量が単調増加する。
遮断特性は最も緩やかで、遅延特性も最も平坦である。

ｂ）チェビシェフ・ワグナー特性フィルタ

通過域の減衰量が波状特性を示し、減衰域で単調増加（ワグナー特性）する。
遮断特性は ａ）より急峻、ｄ）より緩やかである。
遮断域での減衰量はｃ）より大きいが遮断域の帯域は同じである。
遅延特性は ａ） ｃ）よりも変化が大きく、
通過域減衰量のリップルが大きいほど遅延特性が大きく波打つ。

ｃ）ワグナー・チェビシェフ特性フィルタ

通過域の減衰量が単調増加し、減衰域で波状特性を示す。
遮断特性は ａ）より急峻で、ｄ）より緩やかである。
遮断域の帯域は ｂ）と同じであるが遮断域の減衰量は ｂ）より小さい。
遅延特性は ａ）よりも変化が大きいが、ｂ） ｄ）よりも平坦で単調増加減少する（遅延等価が容易）。

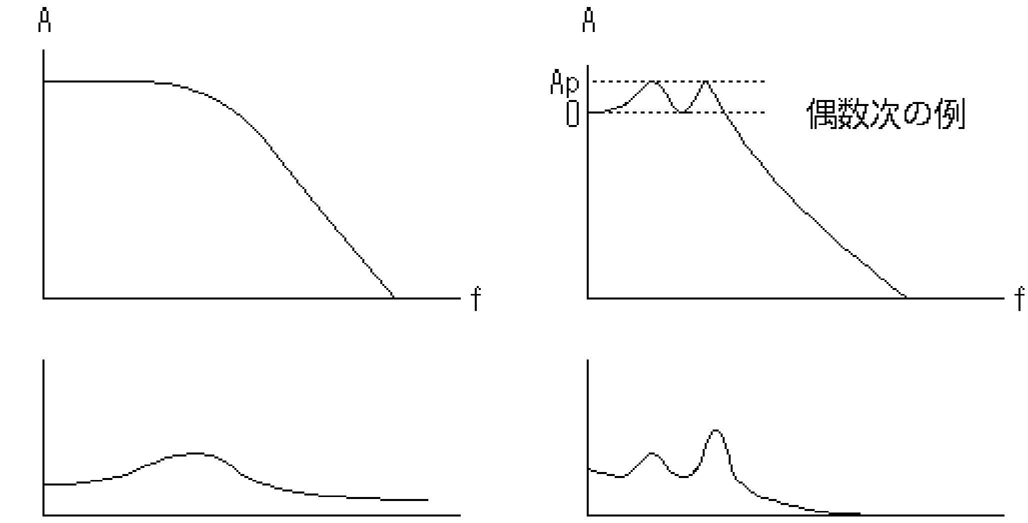
ｄ）連立チェビシェフ（チェビシェフ・チェビシェフ）特性フィルタ

通過域、減衰域とも減衰量が波状特性を示し、遮断特性は最も急峻である。
遅延特性も最も変化が大きく、通過域減衰量のリップルが大きいほど遅延特性が大きく波打つ
（データ伝送用には適さない）。

a）ワグナー・ワグナー　　b）チェビシェフ・ワグナー

遮断特性

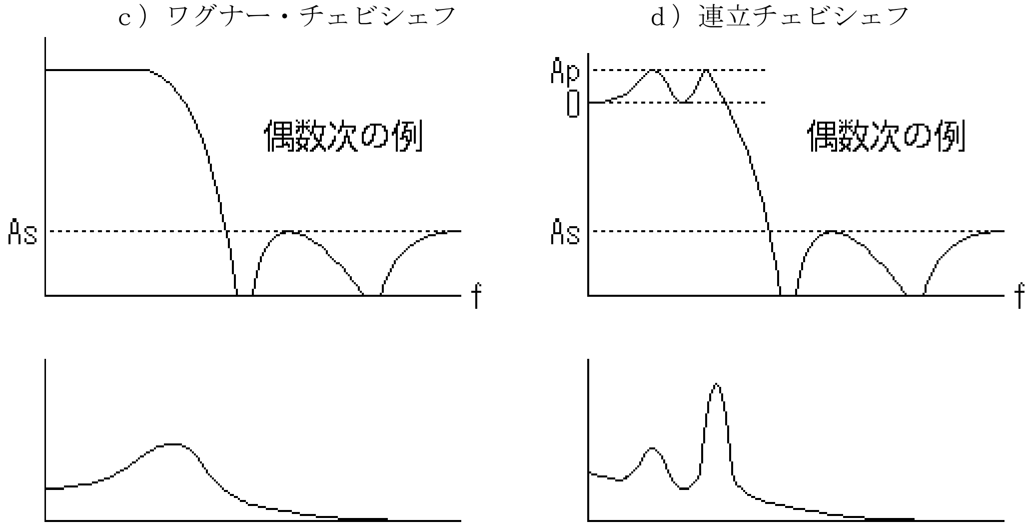
遅延特性



c）ワグナー・チェビシェフ　　d）連立チェビシェフ

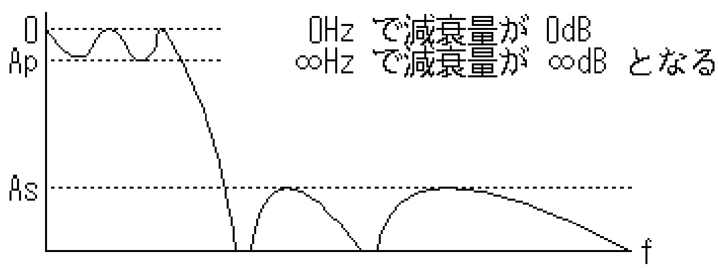
遮断特性

遅延特性



奇数次のフィルタ特性

連立チェビシェフの例



奇数次のチェビシェフ・ワグナーの通過域、およびワグナー・チェビシェフの減衰域も同様の特性。

一般的に１次のフィルタはローコストなので、奇数次のフィルタの方が有利となる。

注）ここにはＬＰＦ特性のみを示したが、ＨＰＦ、ＢＰＦ、ＢＥＦ特性のフィルタも可能であり、基本ＬＰＦから周波数変換を行って算出できる。